Morphismes de groupes

Table des matières

1 Généralités

1.1 Définition

Définition 1 : Soit $(G, *)$ et $(H, \diamond)$ deux groupes .

Une application f de G dans H est un morphisme de groupes si :

$$\forall x, x' \in G, \quad f(x * x') = f(x) \diamond f(x')$$

Si $G = H$, on dit que f est un endomorphisme de G

Remarque : On dit aussi homomorphisme au lieu de morphisme. Homomorphisme signifiant « même structure ».

Souvent on remplace les deux lois internes $*$ et $\diamond$ par la loi multiplicative pour la simplicité de la rédaction. Un morphisme de G dans H est alors défini par :

$$\forall x, y \in G, \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

On notera par la suite les lois de G et H multiplicativement.
Mais il est à retenir que ces deux lois notées multiplicativement peuvent être différentes.

Exemples :

- l'application exp de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un morphisme de groupes
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$
- l'application ln de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- f de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$ telle que $f(2) = 3$ n'est pas un morphisme.
$$f(2) = 3 \;\Rightarrow\; f(1+1) = 3 \;\Rightarrow\; f(1) + f(1) = 3 \;\Rightarrow\; 2f(1) = 3 \;\Rightarrow\; f(1) = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$$

1.2 Propriétés

Théorème 1 : Soit f un morphisme de G dans H. On a alors :

- $f(e_G) = e_H$
- $\forall x \in G, \quad f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$

Remarque : Un morphisme de groupe envoie le neutre sur le neutre et l'inverse sur l'inverse.

Démonstration :

- $\forall x \in G,\ f(x) = f(xe_G) = f(x)f(e_G) \;\Rightarrow\; f(e_G) = e_H$
- $\forall x \in G,\ e_H = f(e_G) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) \;\Rightarrow\; f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$

Exemple : En reprenant le morphisme avec exp et en tenant compte des lois additive et multiplicative, on a bien :

$$\exp(0) = 1 \text{ et } \exp(-x) = [\exp(x)]^{-1} = \frac{1}{\exp(x)}$$

1.3 Composition de morphismes

Théorème 2 : Soient deux morphisme de groupes f et g définies respectivement de G dans H et de H dans K.
$g \circ f$ est un morphisme de groupe de G dans K.

Démonstration :

$$\forall x, y \in G, \;\; g \circ f(xy) = g\left[f(xy)\right] = g\left[f(x)f(y)\right] = g[f(x)]g[f(y)] = g \circ f(x).g \circ f(y)$$

1.4 Isomorphismes

Définition 2 : Soit f un morphisme du groupe de G dans H.

- f est un isomorphisme de G sur H si f est bijective.
  f^{-1} est alors un isomorphisme de H sur G.
- Si $G = H$ l'isomorphisme f est appelée automorphisme de G.
- G et H sont isomorphes s'il existe un isomorphisme f de G sur H

Démonstration : Montrons que si f est bijective, f^{-1} est un morphisme de groupes de H dans G.

$$\forall y, y' \in H \overset{f \text{ bijective}}{\Rightarrow} \exists !\, x, x' \in G, \;\; y = f(x) \;\text{ et }\; y' = f(x')$$
$$f^{-1}(yy') = f^{-1}\left[f(x)f(x')\right] \overset{f \text{ morphisme}}{=} f^{-1}\left[f(xx')\right] = xx' = f^{-1}(y)f^{-1}(y')$$

Exemples :

- exp est un isomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln = \exp^{-1}$ est un isomorphisme du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ sur le groupe additif $\mathbb{R}$. Les groupes $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont isomorphes.

2 Image et noyau

2.1 Définition

Définition 3 : Soit f un morphisme de groupes de G sur H.

- On appelle, image de f, l'ensemble noté $\operatorname{Im} f$, défini par
$$\operatorname{Im} f = f(G) = \{f(x), \;\; x \in G\}$$
- On appelle noyau de F, l'ensemble noté $\operatorname{Ker} f$, défini par :
$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}\left(\{e_H\}\right) = \{x \in G, \;\; f(x) = e_H\}$$

Remarque : Le mot « noyau » se traduit par « kernel » en anglais et par « kern » en allemand.

2.2 Propriétés

Théorème 3 : Soit f un morphisme de groupes de G dans H.
- $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de H.
- $\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe de G.
- f est injective si, et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{e_G\}$.
- f est surjective si, et seulement si $\operatorname{Im} f = H$.

Démonstration : Utilisons les critères d'un sous-groupe.

- $\operatorname{Im} f$ sous-groupe de H :
  - $f(e_G) = e_H \quad \Rightarrow \quad e_H \in \operatorname{Im} f$
  - $\forall y, y' \in \operatorname{Im} f,\ \exists\, x, x' \in G, \quad y = f(x)$ et $y' = f(x')$
    $$y(y')^{-1} = f(x)[f(x')]^{-1} = f(x)f(x'^{-1}) = f\left[x(x')^{-1}\right] \in \operatorname{Im} f$$
- $\operatorname{Ker} f$ sous-groupe de G
  - $f(e_G) = e_H \quad \Rightarrow \quad e_G \in \operatorname{Ker} f$
  - $\forall x, y \in \operatorname{Ker} f,\ \ f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)\left[f(y)\right]^{-1} = e_H(e_H)^{-1} = e_H \quad \Rightarrow$
    $xy^{-1} \in \operatorname{Ker} f$
- f est injective si, et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{e_G\}$.
  - f injective $\quad \Rightarrow \quad (f(x) = f(e_G) \quad \Rightarrow \quad x = e_G) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \{e_G\}$
  - $\operatorname{Ker} f = \{e_G\}$, $\forall x, x' \in G,\ \ f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad f(x)\left[f(x')\right]^{-1} = e_H \quad \Rightarrow$
    $f(x)f(x^{-1}) = e_H \quad \Rightarrow \quad f[x(x')^{-1}] = e_H \quad \overset{\operatorname{Ker} f = \{e_G\}}{\Rightarrow}$
    $x(x')^{-1} = e_G \quad \Rightarrow \quad x = x' \quad \Rightarrow \quad f$ injective
- f est surjective si, et seulement si $\operatorname{Im} f = H$ immédiat

2.3 Exemples

2.3.1 Application multiple

Soit un entier $k \geqslant 2$. Soit $f\ :\ \begin{cases} (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +) \\ \quad n \quad \to f(n) = kn \end{cases}$

- f est un morphisme de groupes car :
  $$\forall n, m \in \mathbb{Z}, \quad f(n+m) = k(n+m) = kn + km = f(n) + f(m)$$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad kn = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \{0\}$, f est injective
- $\operatorname{Im} f = \{kn,\ \ n \in \mathbb{Z}\} = k\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$, f n'est pas surjective.

2.3.2 Module unitaire

Soit $f\ :\begin{cases}(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{U},\times)\\ \quad x \quad\ \to f(x)=e^{ix}\end{cases}$

On rappelle que $\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1.

- f est un morphisme de groupes car :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad f(x+y)=e^{i(x+y)}=e^{ix+iy}=e^{ix}\times e^{iy}=f(x)f(y)$$

- $e^{ix}=1 \quad\Rightarrow\quad x=0\,[2\pi]=k2\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}.$

  $\operatorname{Ker} f=\{k2\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\}\neq\{0\}$, f n'est pas injective.
- $\operatorname{Im} f=\left\{e^{ix},\ \ x\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{U},\ \ f$ est surjective

2.3.3 Puissances de *a*

Montrons que tout les morphismes f du groupe additif $\mathbb{Z}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{Q}^*$ sont tels que : $\forall n\in\mathbb{Z},\ \ f(n)=a^n,\ \ a\in\mathbb{Q}^*$.
Le morphisme f est alors injectif.

- On doit avoir $f(0)=1$ et posons $f(1)=a,\quad a\in\mathbb{Q}^*$
- Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ f(n)=a^n$

  Initialisation : Pour $n=1,\ f(1)=a=a^1$. La proposition est initialisée.

  Hérédité : $n\in\mathbb{N}^*$, on admet que $f(n)=a^n$, montrons que $f(n+1)=a^{n+1}$

  $f(n+1)\overset{f\text{ morphisme}}{=}f(1)\times f(n)=a\times a^n=a^{n+1}$

  La proposition est héréditaire.

  Par initialisation et hérédité : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ f(n)=a^n$.
- D'après les propriétés des morphismes : $f(-n)=[f(n)]^{-1}=[a^n]^{-1}=a^{-n}$
- Conclusion : $\forall n\in\mathbb{Z},\ \ f(n)=a^n,\ \ a\in\mathbb{Q}^*$
- $a^n=1 \quad\Rightarrow\quad n=0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{Ker} f=\{0\} \quad\Rightarrow\quad f$ est injective